PARTE A: Problemas del 1 al 10.

El puntaje por respuesta correcta es de +3 puntos, respuesta incorrecta -0.5 puntos y pregunta en blanco 0 puntos.

Problema 1. ¿Cuántos dígitos 0 aparecen en el resultado de $2021 \times 5^{2021} \times 2^{2020}$?

(A) 2020 (B) 2021 (C) 2022 (D) 2023 (E) 2024

Problema 2. ¿Cuánto es la mitad de 4^{2021}?

(A) 4^{2020} (B) 2^{2020} (C) 2^{4040} (D) 2^{4041} (E) 2^{2021}

Problema 3. Jorge encuentra la suma de los tres primeros números enteros que son a la vez cuadrados y cubos perfectos. Indica como respuesta la suma de los dígitos del valor que obtiene Jorge.

(A) 9 (B) 11 (C) 16 (D) 20 (E) 21

Problema 4. Un cubo se corta en 8 cubos pequeños idénticos. Si la arista del cubo original mide 16 cm, ¿cuánto mide la arista de los cubos pequeños?

(A) 2 cm (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

Problema 5. Para a y b reales positivos, la división:

$$\frac{x^4-(a-b)x^3-(a-b)x-b^2}{x^2-(a-b)x-b^2}$$

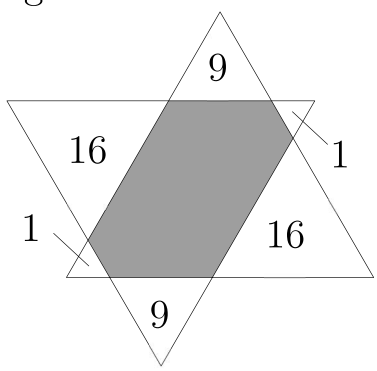
es exacta. Determina el valor de b.

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 2 (E) 4

Problema 6. Gillian enumera los primeros cuatro números primos en orden creciente. Cuando ella divide el entero positivo N entre el primer primo, el resto es 1. Cuando divide N entre el segundo primo, el resto es 2. Cuando divide N entre el tercer primo, el resto es 3. Cuando divide N entre el cuarto primo, el resto es 4. Encuentre el resto de dividir el menor valor posible de N entre 9.

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 8

Problema 7. El diagrama muestra dos triángulos equiláteros congruentes cuya superposición es un hexágono (región gris). Las áreas de los triángulos más pequeños, que también son equiláteros, son 1, 1, 9, 9, 16 y 16, como se muestra. ¿Cuál es el área del hexágono gris?



(A) 25 (B) 26 (C) 30 (D) 34 (E) 38

Problema 8. Dada la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} \overline{ABC} \times \\ \overline{CB} \\ \hline \overline{2021B} \end{array}$$

Halle el valor de $A+B+C$.

(A) 9 (B) 11 (C) 12 (D) 14 (E) 17

Problema 9. Encuentra números reales positivos x e y de modo que:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x + y = 429 \text{ y } x^2 + 2xy + y^2 - 4x - y = 371$$

Indica como respuesta la diferencia positiva de x e y.

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

Problema 10. A partir de:

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

Expresa $M(x, y, z) = (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$ en función de a.

(A) a^3 (B) $a^3 - a$ (C) $-a^2$ (D) $a^2 + a$ (E) $-a^3$

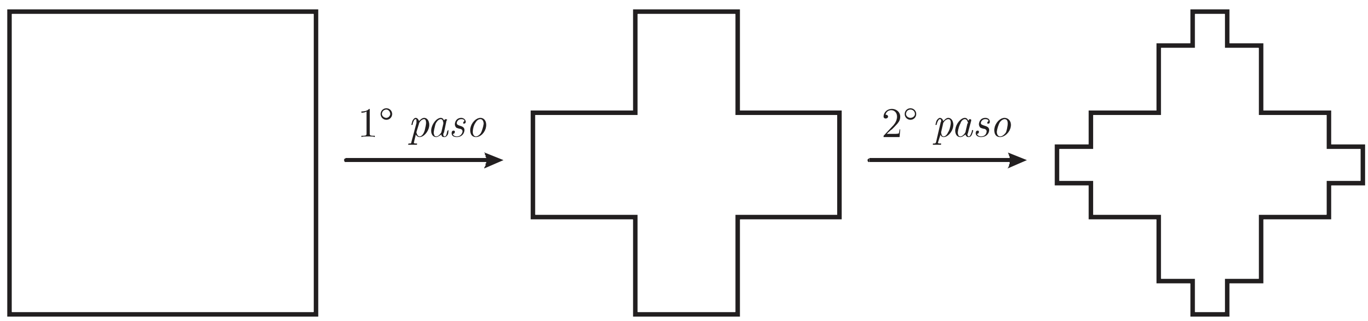
PARTE B: Problemas del 11 al 15.

El puntaje por respuesta correcta es de +6 puntos, respuesta incorrecta -1 puntos y pregunta en blanco 0 puntos.

Problema 11. El producto de los números enteros M y N es 96 y su suma es menor que 30. ¿Cuál es el mayor valor posible de $|M+N|$?

Problema 12. Decimos que el producto de $1996 \times 2021 = 4033916$ comienza con 4033. Encuentra el menor entero positivo N, tal que el producto de $N \times 2021$ comienza con 2020.

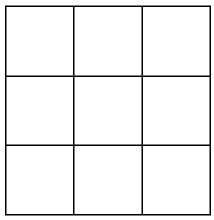
Problema 13. Una hoja de papel tiene forma de cuadrado. En el *primer paso*, se cortan cuadrados pequeños de las esquinas, de modo que el polígono resultante tiene 12 vértices como en la figura mostrada. En el *segundo paso*, se vuelven a cortar cuadrados pequeños de las esquinas de 90° y ahora el polígono resultante tiene 28 vértices. En *cada paso*, seguimos repitiendo esta operación de cortar cuadrados pequeños de las esquinas de 90°.



¿Cuántos vértices (esquinas de 90° y 270°) tendrá el polígono resultante después del quinto paso?

Problema 14. Determina cuántos pares de números primos $(p,\ q)$, con $2 \leq p,\ q < 100$, cumplen que $p+6$, $p+10$, $q+4$, $q+10$ y $p+q+1$ son todos números primos.

Problema 15. En las casillas del tablero de 3×3 se deben escribir 9 números (no necesariamente diferentes), de manera que la suma de los números en cada columna y en cada fila sea igual a cero.



¿Cuál es la menor cantidad *impar* de números distintos de cero que pueden escribirse en el tablero?