

III OLIMPIADA RECREATIVA DE MATEMÁTICA
JUEGOS Y PROBLEMAS 2014

CUARTO DE SECUNDARIA

Tiempo: 80 minutos

Problema 1. ¿Para cuántos números enteros positivos a , ($1 \leq a \leq 2014$) es a^a un número cuadrado perfecto?

- (A) 1024 (B) 1026 (C) 1027 (D) 1028 (E) 1029

Problema 2. En la tabla de multiplicación de la derecha, los asteriscos representan números enteros positivos de modo que la tabla es correcta. ¿Cuál es el mayor número que aparece más de una vez en las entradas del tablero de 5×5 ?

\times	*	*	*	7
*	24	*	*	56
*	*	36	8	*
*	*	27	6	*
6	18	*	*	42

- (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 36

Problema 3. Un número *capicúa* es un número entero positivo que al invertir el orden de sus cifras no cambia, por ejemplo 707 y 154451. Carmen escribe una lista de todos los números capicúas de 5 dígitos en orden creciente. ¿Cuál es el décimo segundo número de la lista de Carmen?

- (A) 11111 (B) 11211 (C) 12221 (D) 12321 (E) 12421

Problema 4. Encuentre el mínimo valor que toma $f(x) = \frac{5 - 4x + x^2}{2 - x}$ para $x \in (-\infty; 2)$.

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 2 (E) 3

Problema 5. Los tres primeros términos de una progresión geométrica son $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt[6]{3}$. ¿Cuál es el cuarto término?

- (A) 1 (B) $\sqrt[7]{3}$ (C) $\sqrt[8]{3}$ (D) $\sqrt[9]{3}$ (E) $\sqrt[10]{3}$

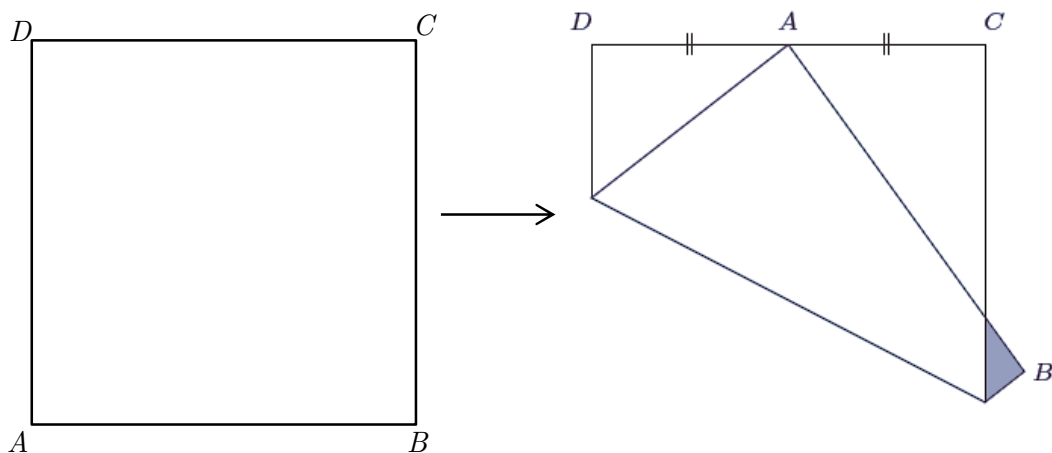
Problema 6. Un triángulo ABC es inscrito en una semicircunferencia de radio 5. Si $\overline{AB} = 10$, encuentre el máximo valor entero de k^2 , donde $k = \overline{AC} + \overline{BC}$.

- (A) 50 (B) 100 (C) 150 (D) 200 (E) 400

Problema 7. Dos circunferencias se intersectan en los puntos A y B . Los arcos menores AB miden 30° en una circunferencia y 60° en la otra circunferencia. ¿Cuál es la razón del área del círculo grande al área del círculo pequeño?

- (A) 2 (B) $1 + \sqrt{3}$ (C) $2 - \sqrt{3}$ (D) $2 + \sqrt{3}$ (E) 4

Problema 8. Un cuadrado $ABCD$ con perímetro $32u$ se dobla de tal manera que el vértice A se convierte en el punto medio de CD (ver figura). Encuentre el área del triángulo gris (en unidades cuadradas).



- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

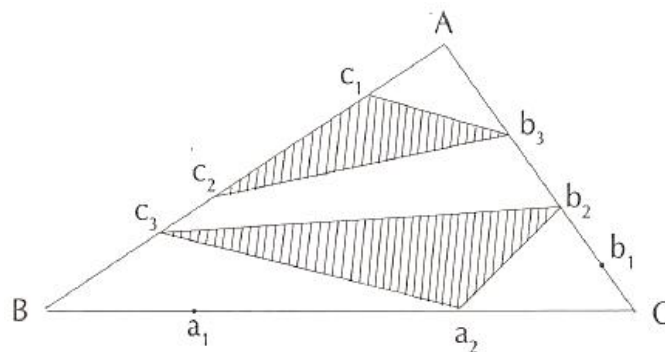
Problema 9. Sea $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ una sucesión estrictamente decreciente de enteros positivos que satisface la siguiente condición:

$$|a_{i+1} - a_i| \leq 2014 - i ; \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n - 1$$

¿Cuál es la mayor cantidad de términos que puede tener dicha sucesión?

- (A) 1006 (B) 1007 (C) 2013 (D) 2014 (E) 2015

Problema 10. Sobre los lados del triángulo ABC se han tomado ocho puntos distintos $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$. ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar usando éstos puntos como vértices?. Por ejemplo, en la figura, se han dibujado los triángulos: $c_1b_3c_2$ y $c_3b_2a_2$.



- (A) 18 (B) 36 (C) 48 (D) 54 (E) 64

Problema 11. Sean $a < b < c$ tres números enteros tales que $a; b; c$ forman una progresión aritmética (en ese orden) y $a; c; b$ forman una progresión geométrica (en ese orden). ¿Cuál es el menor valor posible de c ?

- (A) - 2 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 6

Problema 12. ¿Cuál es el mayor entero n , tal que $n^3 + 100$ es divisible por $n + 10$?. Indique como respuesta la suma de sus cifras de n .

- (A) 18 (B) 17 (C) 16 (D) 15 (E) 14

Problema 13. Existen exactamente N números racionales distintos k ($-200 < k < 200$) tal que la ecuación:

$$5x^2 + kx + 12 = 0,$$

tiene al menos una solución entera para x . ¿Cuál es el valor de N ?

- (A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 48 (E) 78

Problema 14. Si escribimos los números del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ en algún orden, conseguiremos una n -cadena. Por ejemplo, una posible 11 – cadena es:

3764581121910

Encuentre el menor n , con $n > 1$, tal que exista una n -cadena que es un número capicúa.

- (A) 12 (B) 15 (C) 19 (D) 21 (E) 23

Problema 15. Sea $ABCDE$ un pentágono inscrito en una circunferencia tal que $AB = CD = 3$, $BC = DE = 10$, y $AE = 14$. La suma de las longitudes de todas las diagonales de $ABCDE$ es igual al $\frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros positivos primos entre sí. ¿Cuál es valor de $m + n$?

- (A) 129 (B) 247 (C) 353 (D) 391 (E) 423