OLIMPIADA RECREATIVA DE MATEMÁTICA

JUEGOS Y PROBLEMAS 2021

:: EDICIÓN OTOÑO ::

Secundaria

4

PARTE A: Problemas del 1 al 10.

El puntaje por respuesta correcta es de +3 puntos, respuesta incorrecta -0.5 puntos y pregunta en blanco 0 puntos.

Problema 1. Jorge encuentra la suma de los tres primeros números enteros que son a la vez cuadrados y cubos perfectos. Indica como respuesta la suma de los dígitos del valor que obtiene Jorge.

(A) 9 (B) 11 (C) 16 (D) 20 (E) 21

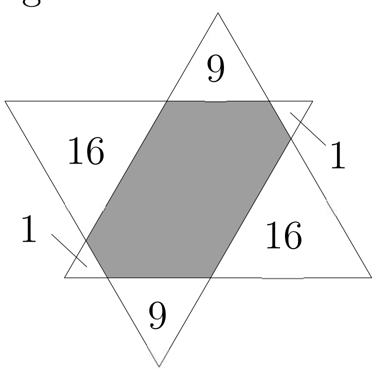
Problema 2. Para a y b reales positivos, la división:

$$\frac{x^4 - (a-b)x^3 - (a-b)x - b^2}{x^2 - (a-b)x - b^2}$$

es exacta. Determina el valor de b.

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 2 (E) 4

Problema 3. El diagrama muestra dos triángulos equiláteros congruentes cuya superposición es un hexágono (región gris). Las áreas de los triángulos más pequeños, que también son equiláteros, son 1, 1, 9, 9, 16 y 16, como se muestra. ¿Cuál es el área del hexágono gris?



(A) 25 (B) 26 (C) 30 (D) 34 (E) 38

Problema 4. A partir de:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3 \end{aligned}$$

Expresar $M(x, y, z) = (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$ en función de a.

(A) a^3 (B) $a^3 - a$ (C) $-a^2$ (D) $a^2 + a$ (E) $-a^3$

Problema 5. ¿Cuántos enteros positivos n satisfacen

$$\left(2021n\right)^{50} > n^{100} > 2^{200} \ ?$$

(A) 2012 (B) 2016 (C) 2020 (D) 2021 (E) 2028

Problema 6. Dos series geométricas infinitas tienen la misma suma. El primer término de la primera serie es 1, y el primer término de la segunda serie es 4. Coincidentemente el quinto término de ambas series es el mismo. La suma de cada serie se puede escribir como $m + \sqrt{n}$, donde m y n son números enteros positivos.
Encuentra $m + n$.

(A) 27 (B) 25 (C) 23 (D) 19 (E) 16

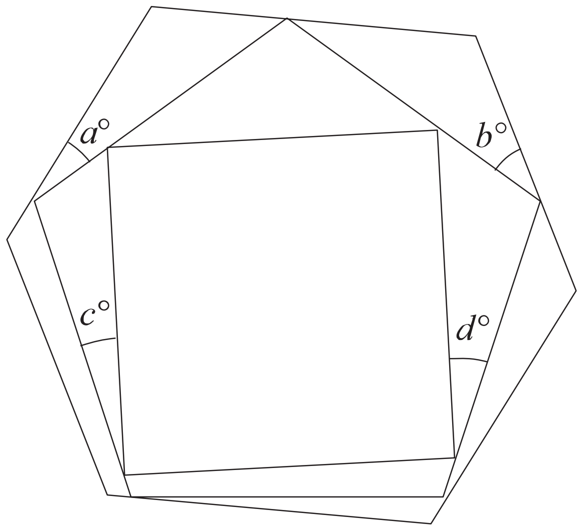
Problema 7. Dada la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} \overline{ABC} \times \\ \overline{CB} \\ \hline \overline{2021B} \end{array}$$

Halle el valor de $A + B + C$.

(A) 9 (B) 11 (C) 12 (D) 14 (E) 17

Problema 8. La figura muestra un cuadrado cuyos vértices tocan los lados de un pentágono regular. Cada vértice del pentágono toca un lado de un hexágono regular. Encuentra el valor de $a + b + c + d$.



(A) 48 (B) 64 (C) 72 (D) 84 (E) 96

Problema 9. Encuentra cuántos pares de números enteros (x, y) satisfacen la ecuación:

$$1 + 20x + 21y = xy$$

(A) Infinitas (B) 8 (C) 6 (D) 4 (E) 2

Problema 10. Reducir la siguiente expresión:

$$\left(\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^4$$

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (C) 4 (D) 8 (C) $2\sqrt{2}$

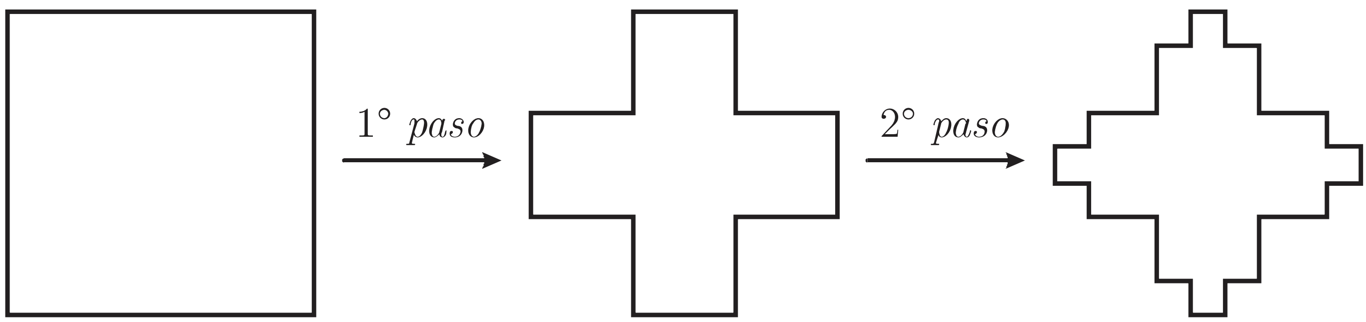
PARTE B: Problemas del 11 al 15.

El puntaje por respuesta correcta es de +6 puntos, respuesta incorrecta -1 puntos y pregunta en blanco 0 puntos.

Problema 11. El producto de los números enteros M y N es 96 y su suma es menor que 30. ¿Cuál es el mayor valor posible de $|M+N|$?

Problema 12. Si $r_1, r_2 \ldots, r_{2021}$ son las raíces de la ecuación $\sum_{k=1}^{2021} x^k - \sqrt{2} = 0$, determina el valor de $\left(\sum_{k=1}^{2021} r_k^{-1}\right)^{-2}$

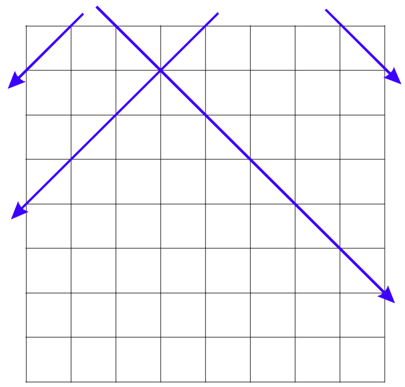
Problema 13. Una hoja de papel tiene forma de cuadrado. En el *primer paso*, se cortan cuadrados pequeños de las esquinas, de modo que el polígono resultante tiene 12 vértices como en la figura mostrada. En el *segundo paso*, se vuelven a cortar cuadrados pequeños de las esquinas de 90° y ahora el polígono resultante tiene 28 vértices. En *cada paso*, seguimos repitiendo esta operación de cortar cuadrados pequeños de las esquinas de 90°.



¿Cuántos vértices (esquinas de 90° y 270°) tendrá el polígono resultante después del quinto paso?

Problema 14. Sea $f(x) = ax^2 + bx$ donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Encuentra el valor de b tal que $f\left(f\left(x\right)\right) = 0$ tenga exactamente tres raíces reales.

Problema 15. En las casillas de un tablero de $8{\times}8$, se escriben los números 1 y -1 de modo que en cada fila, en cada columna y en cada diagonal (en particular, en las celdas de las esquinas) los productos de los números escritos sean iguales a 1. ¿Cuál es la máxima cantidad de números -1 que pueden escribirse en el tablero?



Aclaración: En el tablero, las flechas azules señalan algunas de las *diagonales* a las que hace mención el enunciado del problema.