III OLIMPIADA RECREATIVA DE MATEMÁTICA

JUEGOS Y PROBLEMAS 2014

QUINTO DE SECUNDARIA

Tiempo: 80 minutos

Problema 1. ¿Para cuántos números enteros positivos a, $(1 \leq a \leq 2014)$ es a^a un número cuadrado perfecto?

(A) 1024 (B) 1026 (C) 1027 (D) 1028 (E) 1029

Problema 2. ¿Cuántos números enteros pueden ser expresados como suma de tres números distintos escogidos del conjunto $\{4, 7, 10, 13..., 46\}$?

(A) 36 (B) 37 (C) 42 (D) 43 (E) 45

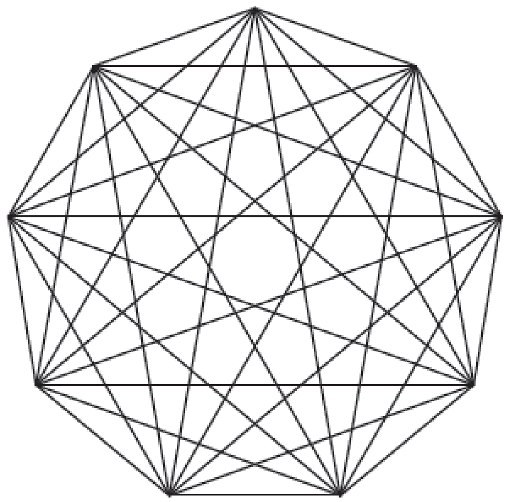
Problema 3. En una progresión armónica, el término de lugar **m** es **n** y el término de lugar **n** es **m**. Calcule el término del lugar **mn** de la progresión armónica.
Recuerde: Una progresión armónica es una sucesión de números tales que sus recíprocos forman una progresión aritmética.

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) $\dfrac{3}{2}$

Problema 4. El examen de la *Olimpiada Recreativa de Matemática*: "*Juegos y Problemas*" consta de 15 preguntas. Todas las respuestas son números enteros diferentes comprendidos entre 000 y 999, inclusive. Si las 15 respuestas forman una progresión aritmética con la mayor razón posible, calcule la mayor suma posible de las 15 respuestas.

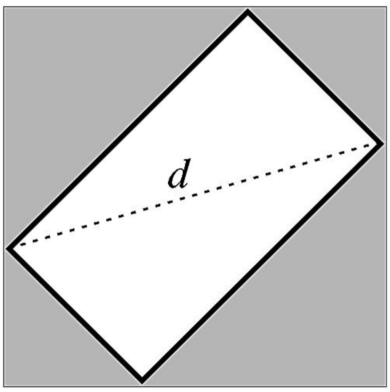
(A) 8 355 (B) 7 530 (C) 7 350 (D) 7 135 (E) 6 955

Problema 5. La figura muestra un nonágono regular con todas sus diagonales trazadas. Considere todos los triángulos cuyos tres vértices son vértices del nonágono. ¿Cuántos de estos triángulos son isósceles?
Aclaración: Considere que un triángulo es isósceles si al menos tiene dos lados iguales.



(A) 27 (B) 30 (C) 33 (D) 36 (E) 39

Problema 6. Un triángulo rectángulo isósceles es cortado en cada una de las cuatro esquinas de la pieza cuadrada de papel (En la figura de abajo se muestran los triángulos cortados en color gris). Encuentre la longitud de la diagonal d, si la suma de las áreas de los triángulos cortados es $200u^2$



(A) $10\ u$ (B) $20\ u$ (C) $10\sqrt{2}\,u$ (D) $20\sqrt{2}\,u$ (E) $40\ u$

Problema 7. Dado $f(x,y)$ definido por $f(x,0)=x$ y $f(x,y+1)=f(f(x,y),y)$ ¿Cuál de las siguientes expresiones es es la mayor?.

(A) $f(14,20)$ (B) $f(16,18)$ (C) $f(18,16)$ (D) $f(20,14)$ (E) $f(22,12)$

Problema 8. Si las raíces de la ecuación:

$$T(x)=x^3+x^2+Px+Q=0\,.$$

son $\operatorname{sen}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, y $-\csc^2\alpha$, para números reales α, P y Q.

Calcule el valor de $T(5)$.

(A) $\dfrac{567}{4}$ (B) $\dfrac{657}{4}$ (C) $\dfrac{765}{2}$ (D) $\dfrac{567}{2}$ (E) $\dfrac{765}{4}$

Problema 9. Dado tres cubos cuyas longitudes de sus aristas son enteras. Si la suma de las áreas totales de los tres cubos es 564. Determine el mínimo valor que puede tomar la suma de los volúmenes de los tres cubos.

(A) 856 (B) 786 (C) 764 (D) 586 (E) 476

Problema 10. Para $n\in\mathbb{Z}^+$, se define la siguiente expresión matemática:

$$nx_{n+1}=(n+1)x_n+1$$

además $x_1=\dfrac{1}{2014}$. Determine el valor de x_{2014}.

(A) $\dfrac{2013}{2014}$ (B) $\dfrac{1}{2014}$ (C) 1007 (D) 2014 (E) 1

Problema 11. Encuentre el mayor número de 9 dígitos cuyo producto de sus dígitos es 9! (factorial de 9). Indique como respuesta la suma de dígitos de dicho número.

(A) 45 (B) 48 (C) 50 (D) 51 (E) 53

Problema 12. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una progresión aritmética, y sea $b_1, b_2, b_3, \ldots$ una progresión geométrica. Definimos la sucesión: $c_1, c_2, c_3, \ldots$ tal que $c_n = a_n + b_n$ para cada entero positivo n. Si $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 15$, y $c_4 = 2$, calcule c_5.

(A) – 41 (B) – 4 (C) 43 (D) 61 (E) 76

Problema 13. Si $(a,\ b,\ c)$ es una tripleta de números enteros que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$ab - 3c = \frac{abc}{9} + 2$$
$$bc - 3a = \frac{abc}{9} + 3$$
$$ca - 3b = \frac{abc}{9} + 6$$

Calcule $2a + 3b + 6c$

(A) – 8 (B) – 5 (C) 8 (D) 9 (E) 11

Problema 14. Si 4, b, y c forman una progresión geométrica en ese orden, de razón r. Encuentre la suma de los valores enteros posibles de r tal que:

$$\frac{7}{2} \le \log_4 b + \log_b c \le \frac{41}{10}$$

(A) 20 (B) 25 (C) 28 (D) 30 (E) 32

Problema 15. Sea $P(n)$ el producto de las cifras de n, definimos:

$$P_k(n) = \underbrace{P(P(\ldots(P}_{k-\text{veces}}(n)))).$$

Llamamos *persistencia* de n al menor valor k que hace que $P_k(n)$ sea un número de un dígito. Por ejemplo, el número 723 tiene persistencia 2 porque $P(P(723))=8$. Encuentre el mayor número par con dígitos diferentes entre sí, con persistencia 3. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

(A) 36 (B) 39 (C) 40 (D) 42 (E) 45