OLIMPIADA RECREATIVA DE MATEMÁTICA

JUEGOS Y PROBLEMAS 2019

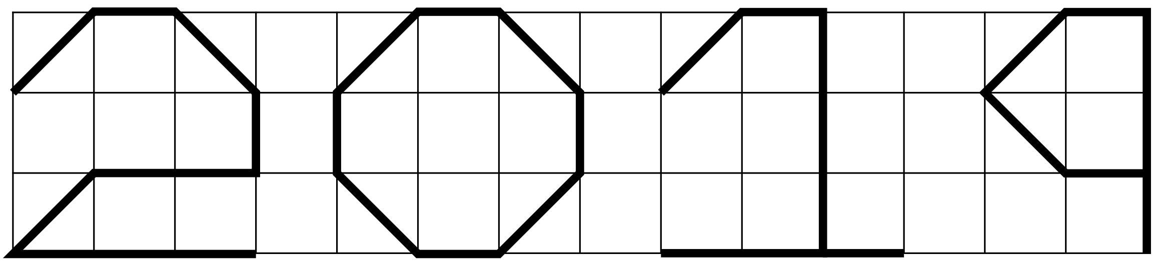
Secundaria

5

PARTE A: Problemas del 1 al 10.

El puntaje por respuesta correcta es de +3 puntos, respuesta incorrecta -0.5 puntos y pregunta en blanco 0 puntos.

Problema 1. Un artista ha dibujado 2019 en una cuadrícula usando segmentos de línea recta como se muestra a continuación.



La cuadrícula está formada por cuadrados de 1cm de lado. ¿Cuál es la longitud total de los segmentos que ha dibujado el artista?

(A) $25+11\sqrt{2}$ (B) $24+10\sqrt{2}$ (C) $23+11\sqrt{2}$
(D) $24+11\sqrt{2}$ (E) $23+10\sqrt{2}$

Problema 2. Indique el valor de:

$$A = \frac{sen 90^\circ + \cos 720^\circ + \sec 180^\circ - \csc 270^\circ}{\tan 360^\circ + sen 450^\circ - \cot 90^\circ}$$

(A) -1 (B) 2 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$ (E) -2

Problema 3. Calcula la suma de términos de la siguiente progresión aritmética, sabiendo que tiene $\overline{nn}$ términos.

$$\overline{n1}\,;\ \overline{nm}\,;\ \overline{(n+1)3}\,;\ \cdots\cdots;\ \overline{1(2n)m}$$

(A) 1 800 (B) 1 480 (C) 1 840 (D) 1 400 (E) 1 848

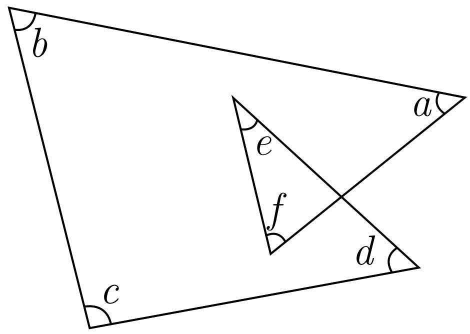
Problema 4. Resolver en $\mathbb{R}$:

$$\frac{2019}{\sqrt{1-x}}+3>2x$$

(A) $\left\langle 1\ ;+\infty\right\rangle$ (B) $\left\langle -\infty\ ;1\right\rangle$ C) $\left\langle -\infty\ ;1\right]$ (D) $\left[\frac{1}{8}\ ;1\right\rangle$ (E) ϕ

Problema 5. En la siguiente figura, determina el valor (en grados) de:

$$a+b+c+d+e+f$$



(A) 200° (B) 270° (C) 360° (D) 540° (E) 720°

Problema 6. Sea a_1, a_2, a_3, ... una progresión aritmética no constante tal que los términos a_1, a_{11} y a_{111} forman, en ese orden, una progresión geométrica. Calcula $\frac{a_{11}}{a_1}$.

(A) 6 (B) 10 (C) 20 (D) 50 (E) 720°

Problema 7. Sabiendo que $\operatorname{sen} x=\frac{12}{13}$ y $\cos y=-\frac{4}{5}$, donde $0°\leq x\leq 90°$ y $90°\leq y\leq 180°$. Encuentra el valor de $\cos\left(x+y\right)$.

(A) $-\frac{56}{65}$ (B) $\frac{56}{65}$ (C) $-\frac{16}{65}$ (D) $\frac{16}{65}$ (E) $-\frac{48}{65}$

Problema 8. En excel se ha creado un programa que genera 2019 términos de una sucesión. Basta con escribir en una celda específica el primer término a_1 y luego presionar la tecla enter para generar automáticamente los otros 2018 términos. La sucesión está basada en la siguiente regla de recursividad:

$$a_{(n+1)} = \begin{cases} \dfrac{2(a_n)+2}{2}; \text{ cuando } a_n \text{ es par.} \\ \dfrac{2(a_n)-2}{2}; \text{ cuando } a_n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si se escribe el número 10 en la celda específica y se presiona enter, ¿cuál es el valor de $S = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2018} + a_{2019}$?

(A) -999 (B) -1009 (C) -1010 (D) 1009 (E) 2019

Problema 9. En un trapecio $ABCD$, AD es paralelo a BC y $\angle D = \angle C - \angle A$. Si $AB = 5$, $BC = 10$, y $CD = 6$, determinar el área del trapecio $ABCD$.

(A) 48 (B) 50 (C) 52 (D) 60 (E) 65

Problema 10. Encuentra cuántos números enteros positivos k menores que 2019 cumplen que:

$$\left(2k-1\right)^2 = 1 + k \times 10^{k/13}.$$

(A) Ninguno (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

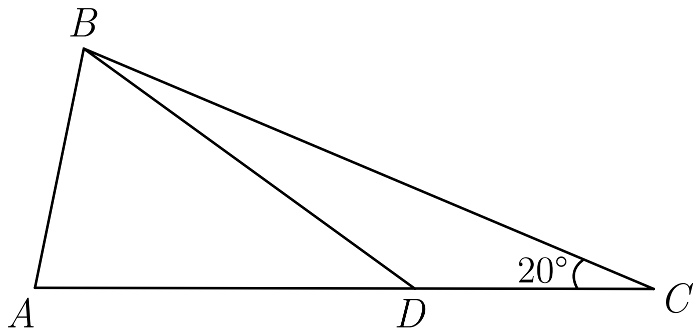
PARTE B: Problemas del 11 al 15.

El puntaje por respuesta correcta es de +6 puntos, respuesta incorrecta -1 puntos y pregunta en blanco 0 puntos.

Problema 11. Empezando con un número entero positivo, un *fragmento* de ese número es cualquier número positivo obtenido al eliminar uno o más dígitos del principio y/o el final de ese número. Por ejemplo: los números 2, 1, 9, 20, 19 y 201 son los fragmentos de 2019.
Encuentra el menor número entero positivo n tal que se cumpla lo siguiente: Existe un fragmento de n tal que al sumarlo con n se obtiene 2019.
Indica como respuesta el residuo de dividir n entre 9.

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 6

Problema 12. En la imagen se muestra un triángulo isósceles ABC donde AC y BC son congruentes. Dado que $AB = CD$, calcula la medida del ángulo BDC.



(A) 120° (B) 127° (C) 135° (D) 143° (E) 150°

Problema 13. Sea P un conjunto de n puntos en el plano con coordenadas enteras, tales que cualesquiera tres de ellos no se están alineados y forman un triángulo cuyo baricentro no tiene ninguna coordenada entera.
Determinar el mayor valor posible n.

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 10

Problema 14. Karen y Paúl se divierten con el siguiente juego: Primero, Karen escribe un entero positivo $a > 2019$ en la pizarra. Luego Paúl comienza a escribir más números en la pizarra, agregando en cada paso el número $2019b + 1$, donde b es mayor número escrito en la pizarra. Paúl gana si en algún momento escribe un número divisible por 2020, de lo contrario, Karen gana.
¿Cuál es la suma de las cifras del menor número que debe escribir Karen para estar segura de ganar?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

Problema 15. Calcula el menor valor positivo de θ, en radianes, para el cual se cumple que:

$$sen\left(\theta\right) + sen\left(2\theta\right) + ... + sen\left(2019\theta\right) = 0.$$

(A) $\frac{\pi}{1010}$ (B) $\frac{\pi}{2020}$ (C) $\frac{\pi}{505}$ (D) $\frac{\pi}{2019}$ (E) $\frac{\pi}{2}$