PARTE A: Problemas del 1 al 10.
El puntaje por respuesta correcta es de +3 puntos, respuesta incorrecta -0.5 puntos y pregunta en blanco 0 puntos.

Problema 1. ¿Cuántos enteros positivos n satisfacen

$$\left(2021n\right)^{50} > n^{100} > 2^{200}\ ?$$

(A) 2012 (B) 2016 (C) 2020 (D) 2021 (E) 2028

Problema 2. Dado los números reales a, b y c:

$$-5 < a < -1$$
$$-2 < b < -1$$
$$2 < c < 5$$

Si M y m son el mayor y menor valor entero de $\dfrac{ab}{c}$ respectivamente, calcula el valor de $M + m$.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Problema 3. Qué valor debe tener a para que x sea igual a z en el sistema:

$$\begin{aligned} ax + 4z &= 119 \\ 5x - az &= 34 \end{aligned}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

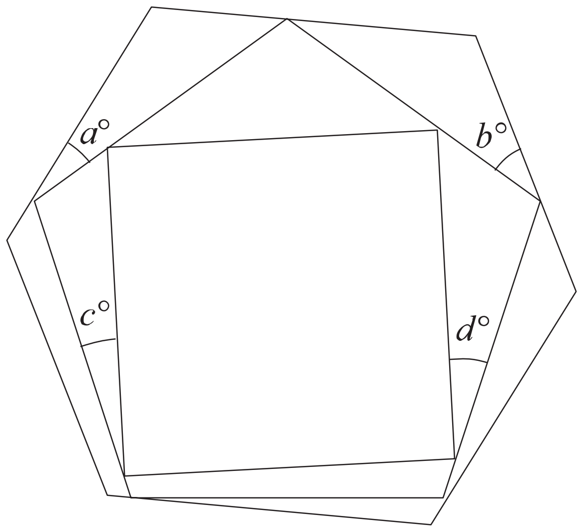
Problema 4. Si 15 y 9 son las longitudes de dos medianas de un triángulo, ¿cuál es el área máxima posible de dicho triángulo?

(A) 72 (B) 90 (C) 120 (D) 125 (E) 135

Problema 5. Dos series geométricas infinitas tienen la misma suma. El primer término de la primera serie es 1, y el primer término de la segunda serie es 4. Coincidentemente el quinto término de ambas series es el mismo. La suma de cada serie se puede escribir como $m+\sqrt{n}$, donde m y n son números enteros positivos. Encuentra $m + n$.

(A) 27 (B) 25 (C) 23 (D) 19 (E) 16

Problema 6. La figura muestra un cuadrado cuyos vértices tocan los lados de un pentágono regular. Cada vértice del pentágono toca un lado de un hexágono regular. Encuentra el valor de $a + b + c + d$.



(A) 48 (B) 64 (C) 72 (D) 84 (E) 96

Problema 7. Encuentra cuántos pares de números enteros (x, y) satisfacen la ecuación:

$$1 + 20x + 21y = xy$$

(A) Infinitas (B) 8 (C) 6 (D) 4 (E) 2

Problema 8. Un triángulo tiene un área de 90 cm^2. Las longitudes (en cm) de los lados del triángulo son x, 12 y 17, donde x es un número entero.
¿Cuál es la suma de los dígitos de x?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Problema 9. Sabiendo que para un ángulo $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ se cumple que:

$$\frac{1 + 2\text{sen}\theta + 3\text{sen}^2\theta + 4\text{sen}^3\theta + ...}{1 + 2\cos\theta + 3\cos^2\theta + 4\cos^3\theta + ...} = \frac{4}{81},$$

calcular el valor de $1 + 2\tan\theta + 3\tan^2\theta + 4\tan^3\theta + \cdots$.

(A) $\dfrac{4}{81}$ (B) $\dfrac{2}{9}$ (C) $\dfrac{27}{8}$ (D) $\dfrac{225}{49}$ (E) $\dfrac{343}{125}$

Problema 10. Dado un rectángulo $ABCD$ y sea P un punto en el segmento AB y Q un punto en el segmento BC. Los segmentos AQ y DP se intersecan en X, los segmentos AQ y CP se intersecan en Y y los segmentos CP y DQ se intersecan en Z. Además, las áreas del triángulo APX, el triángulo CQZ y el cuadrilátero $BPYQ$ son a, b y c respectivamente. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $DXYZ$?

(A) $2a + b + c$ (B) $a + b + c$ (C) $a + b + 2c$
(D) $a + 2b + c$ (E) $2a - b + c$

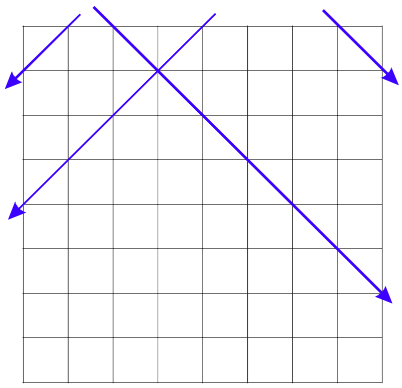
PARTE B: Problemas del 11 al 15.

El puntaje por respuesta correcta es de +6 puntos, respuesta incorrecta -1 puntos y pregunta en blanco 0 puntos.

Problema 11. Si $r_1, r_2 \dots, r_{2021}$ son las raíces de la ecuación $\sum_{k=1}^{2021} x^k - \sqrt{2} = 0$, determina el valor de $\left(\sum_{k=1}^{2021} r_k^{-1}\right)^{-2}$

Problema 12. Sea $f(x) = ax^2 + bx$ donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Encuentra el valor de b tal que $f\left(f\left(x\right)\right) = 0$ tenga exactamente tres raíces reales.

Problema 13. En las casillas de un tablero de 8×8, se escriben los números 1 y -1 de modo que en cada fila, en cada columna y en cada diagonal (en particular, en las celdas de las esquinas) los productos de los números escritos sean iguales a 1. ¿Cuál es la máxima cantidad de números -1 que pueden escribirse en el tablero?



Aclaración: En el tablero, las flechas azules señalan algunas de las *diagonales* a las que hace mención el enunciado del problema.

Problema 14. Se define la siguiente sucesión:

$$\begin{cases} u_0 = 24,\ u_1 = 42 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

Encuentra el mayor entero positivo k tal que 3^k divide exactamente a u_{2021}.

Problema 15. En la figura ABC un triángulo isósceles con $AB = BC$. Si AB, AC y BD son números enteros y AB - $BD = 3$, encuentre AC.