OLIMPIADA RECREATIVA
DE MATEMÁTICA Y COMPRENSIÓN LECTORA

JUEGOS Y PROBLEMAS 2016

QUINTO DE SECUNDARIA

Tiempo: 80 minutos

Problema 1. Si n es un entero positivo tal que:

$$\cos\left(2016^\circ\right) = \cos\left(n^\circ\right)$$

Calcula el menor valor de n:

(A) 216 (B) 144 (C) 126 (D) 36 (E) 396

Problema 2. Determina cuántas ternas (x, y, z) de números reales cumplen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ yz = 2 \\ zx = 3 \end{cases}$$

(A) no hay soluciones (B) 1 (C) 2
(D) más de 2 (E) infinitas

Problema 3. Un entero positivo k es llamado triangular si es igual a la suma de los primeros n enteros positivos, para algún entero positivo n. Por ejemplo, los números 10 y 21 son triangulares, porque $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ y $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.
Samantha empieza a hacer una lista en forma ascendente de todos los números triangulares y se da cuenta que 2016 aparece en su lista. ¿Qué posición ocupa 2016 en la lista de Samantha? De cómo respuesta la suma de sus cifras.

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

Problema 4. Calcula el valor de $\left(1-\cot 23°\right)\left(1-\cot 22°\right)$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\sqrt{2}$

Problema 5. En el interior del rectángulo $ABCD$ se ubica un punto P tal que $AB = CP$ y $BC = 2AP$. Si $\angle BCP = 30°$, calcula $\angle BAP$

(A) 75° (B) 15° (C) 45° (D) 60° (E) 30°

Problema 6. Determina cuántos valores de x en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ cumplen la siguiente ecuación.

$$\frac{\sqrt{3}-1}{sen\, x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Problema 7. Un entero positivo es llamado *añejo* si es múltiplo de 8 y la suma de sus dígitos es múltiplo de 8. Por ejemplo, 1016 es añejo, $1016 = 8\times 127$ y $1+0+1+6=8$, que también es múltiplo de 8.
Determina cuál es la menor diferencia positiva que hay entre dos números añejos.

(A) 8 (B) 16 (C) 24 (D) 32 (E) 40

Problema 8. En cada una de las casillas de un tablero de 3×3 se debe escribir un 0 o un 1. ¿De cuántas maneras podemos llenar las casillas del tablero, si deben existir dos casillas que comparten un lado en común tal que la suma de los números en ellas sea par?

(A) 64 (B) 63 (C) 510 (D) 511 (E) 512

Problema 9. Para cada real x y cada entero positivo n, se define:

$$f_n = \frac{1}{n}\left(sen^n x° + \cos^n x°\right)$$

Calcular el valor de $f_4\left(2016\right) - f_6\left(2016\right)$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{12}$

Problema 10. Determine cuántos pares ordenados $\left(a, b\right)$ de números primos cumplen que $a^{a+1} + b^{b+1}$ también es un número primo.

(A) No hay (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Infinitos

Problema 11. Para cada conjunto M de enteros positivos, sea $f(M)$ la suma de todos sus elementos. Por ejemplo $f(\{2,7,9\}) = 2 + 7 + 9 = 18$.
Sabemos que el conjunto $A = \left\{1,2,3,4,5\right\}$ tiene 32 subconjuntos, y supongamos que S_1, S_2, ..., S_{32} son tales subconjuntos. Calcular:

$$f(S_1) + f(S_2) + f(S_3) + ... + f(S_{32})$$

Nota: Considere que $f(\varnothing) = 0$.

(A) 120 (B) 180 (C) 240 (D) 124 (E) 60

Problema 12. Si existen a lo más tres enteros x que satisfacen la siguiente inecuación:

$$x^2 + bx + 2 \leq 0$$

¿Cuántos valores enteros puede tomar b?

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 4 (E) 1

Problema 13. Considere el conjunto $M = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Ana y Beto juegan de la siguiente manera: Beto escoge k números del conjunto M y los retira, de tal manera que el último dígito del producto de los números restantes sea igual a 2. Si Beto debe pagarle a Ana 1 sol por cada número que él retira, ¿cuál es la menor cantidad de dinero (en soles) que Beto debe pagar?

(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

Problema 14. Sea n un entero positivo tal que:

$$(1 + \tan 1°)(1 + \tan 2°)...(\tan 45°) = 2^n$$

Calcule el valor de n:

(A) 1 (B) 5 (C) 15 (D) 23 (E) 45

Problema 15. Un entero positivo N es llamado *recreativo* si existen enteros positivos distintos a, b y c tales que:

$$N = mcd(a, b) + mcd(b, c) + mcd(c, a)$$

Por ejemplo, 2016 es recreativo, pues tomando $a = 504$, $b = 2016$ y $c = 3024$, tenemos que a, b y c son distintos, y además:

$$mcd(504, 2016) + mcd(2016, 3024) + mcd(3024, 504) = 504 + 1008 + 504 = 2016$$

Determine cuántos elementos del conjunto $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ son recreativos.

(A) 100 (B) 99 (C) 98 (D) 50 (E) 33