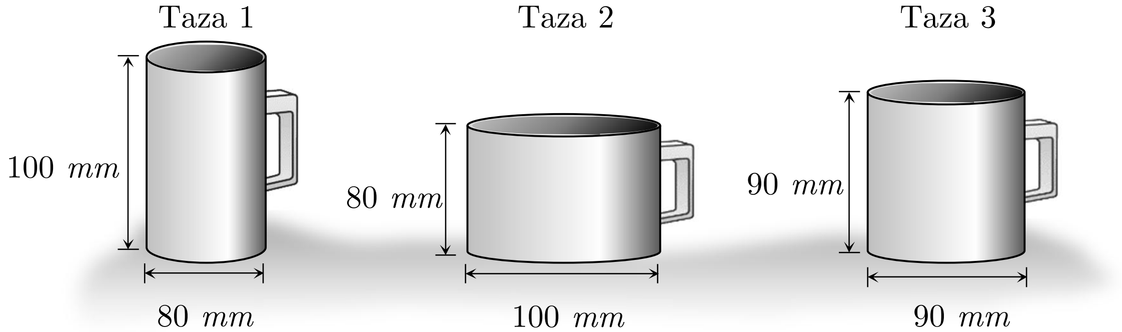
Problema 1. Determina el valor de x al resolver la ecuación e indica como respuesta la suma de cifras de x:

$$\frac{x}{2!}+\frac{x}{0!}+\frac{x}{2!}+\frac{x}{4!}=392$$

(A) 12 (B) 9 (C) 8 (D) 6 (E) 5

Problema 2. Daniela tiene tres modelos diferentes de tazas:



Respecto a la capacidad máxima de agua que puede contener cada taza, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(A) las tres tazas tienen la misma capacidad.
(B) la taza 1 tiene la misma capacidad que la taza 2.
(C) la taza 3 tiene mayor capacidad que la taza 2.
(D) la taza 2 tiene mayor capacidad que la taza 1.
(D) la taza 1 tiene mayor capacidad que la taza 2.

Problema 3. Si $f(3k+1)=8^k$ para todo número real k, calcule

$$D=\frac{f(2x+5)}{f(x+1)\cdot f(x-1)}$$

(A) 2^3 (B) 2^4 (C) 8^2 (D) 8^3 (E) 2^8

Problema 4. Sea k un real positivo y sea n un número real tal que:

$$k^n = (k+1)^n$$

Determina cuántos valores posibles puede tomar n.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Infinitos

Problema 5. Jorge calcula la suma de los números del 1 al 2024, pero por error se salta un número. Sabiendo que dicha suma obtenida es un múltiplo de 5, ¿cuál de los siguientes puede ser el número que se saltó?

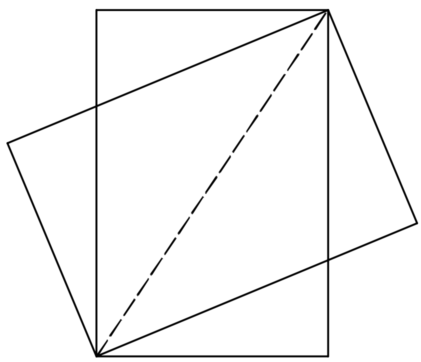
(A) 48 (B) 225 (C) 517 (D) 2021 (E) 2024

Problema 6. Calcule la suma de todos los valores reales que puede tomar x en la ecuación:

$$|x|^2 + |x| = 30$$

(A) 0 (B) 5 (C) 6 (D) 11 (E) 22

Problema 7. Lucía tiene dos cartas idénticas de forma rectangular cuyos lados miden 6 y 9; las coloca sobre la mesa de modo que tengan una diagonal en común, así como se muestra en la imagen. ¿Cuál es el área de la región de la primera carta que está cubierta por la segunda?



(A) 27 (B) 36 (C) 37 (D) 38 (E) 39

Problema 8. Encuentra cuántos pares (x, y) de enteros positivos satisfacen que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{xy}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Problema 9. ¿Cuál es la suma de los divisores positivos de 18000 cuya escritura decimal termina en 50?

(A) 1400 (B) 1650 (C) 3150 (D) 3900 (E) 4030

Problema 10. Sea f una función definida en el conjunto de los números reales, cuyos valores también son números reales. Se sabe que: $f(x) = f(2024 - x)$ y $f(x+20) = f(2002 - x)$ para todos los valores reales x. Además, se sabe que:

$$f(4) + f(6) + f(8) + f(10) = 6$$

Determina el valor de la expresión:

$$f(20) + f(22) + f(24)$$

(A) 16 (B) $\frac{15}{2}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) 24 (E) 28

Problema 11. Sea $S(x)$ la suma de los dígitos de un entero positivo x. Por ejemplo $S(24)=6$ y $S(9)=9$. Determina el máximo valor posible de:

$$S(x+2024) - S(x)$$

(A) 15 (B) 12 (C) 10 (D) 8 (E) 7

Problema 12. Definimos una sucesión de números naturales $\left(a_k\right)_{k\geq 1}$, con los primeros 3 términos $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ y la ley de recurrencia:

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

para todos $n \geq 4$. Encuentra el valor de a_{2024}.

***Aclaración*:** El símbolo $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x. Por ejemplo, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ y $\left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 4$.

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 253 (E) 2024

Problema 13. Sea $ABCD$ un paralelogramo tal que la bisectriz que sale de B interseca el lado CD en su punto medio M. El lado BC mide 6, y la diagonal AC mide 14. Determinar la longitud de AM.

(A) $2\sqrt{19}$ (B) $14-3\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{5}$ (D) 9 (E) $2\sqrt{22}$

Problema 14. Cuando un rayo luminoso se refleja en un espejo plano en un punto M, el ángulo de incidencia i y el ángulo de reflexión r son iguales (fig. 1).

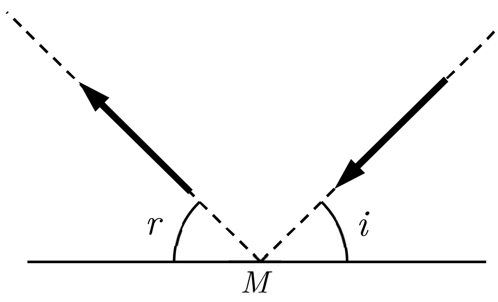


Figura 1

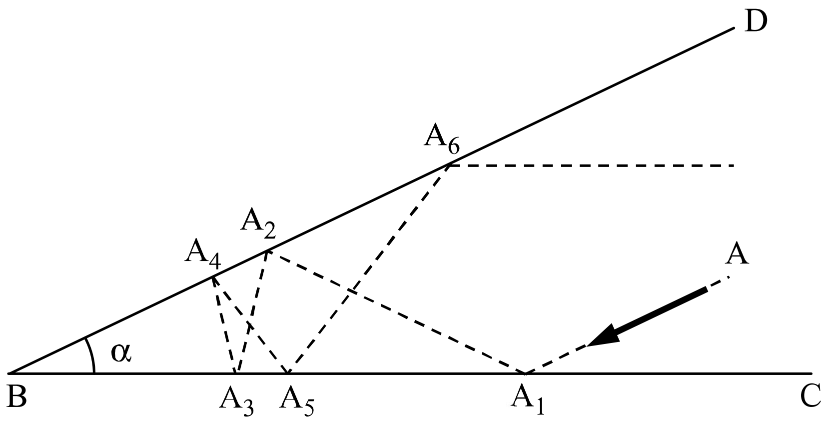


Figura 2

En la figura 2, los espejos BC y BD forman un ángulo agudo α. Desde un punto A se emite un rayo láser hacia el espejo BC, paralelo a BD, que se refleja primero en A_1 y luego en A_2 generando una secuencia de reflexiones sucesivas $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6$. En la figura el ángulo α es 26° y se observa que el rayo se refleja en los espejos un máximo de 6 veces. Determina cuántas veces, como máximo, se reflejaría el rayo de luz si α fuese 40°.

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Problema 15. En una conferencia, hay 100 participantes con identificaciones únicas del 1 al 100. Un par de participantes se considera *compatible* si cada participante del par tiene una identificación que es al menos siete unidades mayor que la mitad de la identificación del otro. ¿Cuál es el número máximo de pares compatibles disjuntos que se pueden formar?

(A) 38 (B) 43 (C) 45 (D) 47 (E) 50