Problema 1. Determina cuántos enteros x resuelven la inecuación:

$$20 < \frac{x}{2!} + \frac{x}{0!} + \frac{x}{2!} + \frac{x}{4!} < 24$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Infinitos

Problema 2. Jorge calcula la suma de los números del 1 al 2024, pero por error se salta un número. Sabiendo que dicha suma obtenida es un múltiplo de 5, ¿cuál de los siguientes puede ser el número que se saltó?

(A) 48 (B) 225 (C) 517 (D) 2021 (E) 2024

Problema 3. Sea k un real positivo y sea n un número real tal que:

$$k^n = (k+1)^n$$

Determina cuántos valores posibles puede tomar n.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Infinitos

Problema 4. Si $f(3k+1) = 8^k$ para todo número real k, calcule

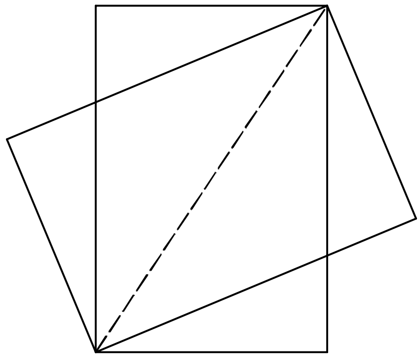
$$D = \frac{f(2x+5)}{f(x+1) \cdot f(x-1)}$$

(A) 2^3 (B) 2^4 (C) 8^2 (D) 8^3 (E) 2^8

Problema 5. De una proporción, cuya constante de proporcionalidad es mayor que dos, se sabe que la diferencia de antecedentes es 7 y la suma de consecuentes es 18. Determine la suma de cifras del mayor término de la proporción.

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 9

Problema 6. Lucía tiene dos cartas idénticas de forma rectangular cuyos lados miden 6 y 9; las coloca sobre la mesa de modo que tengan una diagonal en común, así como se muestra en la imagen. ¿Cuál es el área de la región de la primera carta que está cubierta por la segunda?



(A) 27 (B) 36 (C) 37 (D) 38 (E) 39

Problema 7. Sea $f(x) = ax^2 + bx$ donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Encuentra para cuántos valores de b, $f\left(f\left(x\right)\right) = 0$ tiene exactamente tres raíces reales distintas.

(A) Ninguno (B) 4 (C) 2 (D) 1 (E) Infinitos

Problema 8. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos $f_n\left(x\right)$ como sigue:

- $f_1(x) = \dfrac{1 + \log_a x}{1 - \log_a x}$ con $a > 0 \wedge a \neq 1$.
- $f_n(x) = \dfrac{1 + f_{n-1}(x)}{1 - f_{n-1}(x)}$ para todo $n \geq 2$.

Calcula el valor de $M = \dfrac{1}{1012}\sum_{k=1}^{2024} f_{1012}(a^{2k})$.

(A) 2 (B) 1012 (C) 2024 (D) 2025 (E) 4050

Problema 9. Un programa computacional de laboratorio está escribiendo una cadena de ADN usando solo las bases nitrogenadas A (adenina) y T (timina). El programa debe asegurarse de que ninguna cadena contenga las secuencias de tres bases consecutivas AAA, TTT, AAT, ATA. ¿Cuántas cadenas de longitud infinita (es decir, que continúan ilimitadamente hacia la derecha) podría generar el programa?

Aclaración: La cadena AT tiene longitud 2, y la cadena AAT tiene longitud 3.

(A) Ninguna (B) Infinitas (C) 2 (D) 3 (E) 4

Problema 10. Encuentra la suma de todas las soluciones reales de:

$$x^2 + \cos x = 2024$$

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 45 (E) 90

Problema 11. Definimos una sucesión de números naturales $(a_k)_{k\geq 0}$, con los primeros 3 términos $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ y la ley de recurrencia:

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

para todos $n \geq 3$. Encuentra el valor de a_{2024}.

Aclaración: El símbolo $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x. Por ejemplo, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ y $\left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 4$.

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 253 (E) 2024

Problema 12. En una conferencia, hay 100 participantes con identificaciones únicas del 1 al 100. Un par de participantes se considera *compatible* si cada participante del par tiene una identificación que es al menos siete unidades mayor que la mitad de la identificación del otro. ¿Cuál es el número máximo de pares *compatibles* disjuntos que se pueden formar?

(A) 38 (B) 43 (C) 45 (D) 47 (E) 50

Problema 13. Encuentra cuántas ternas (x, y, z) de números reales positivos satisfacen que:

$$2x - 2y + \frac{1}{z} = \frac{1}{2024}, \quad 2y - 2z + \frac{1}{x} = \frac{1}{2024}, \quad 2z - 2x + \frac{1}{y} = \frac{1}{2024}.$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

Problema 14. Determina el valor absoluto de la suma de:

$$\llbracket 2024\,\text{sen}0° \rrbracket + \llbracket 2024\,\text{sen}1° \rrbracket + \llbracket 2024\,\text{sen}2° \rrbracket + \ldots + \llbracket 2024\,\text{sen}359° \rrbracket$$

donde $\llbracket x \rrbracket$ denota el mayor entero menor o igual que x, por ejemplo $\llbracket \pi \rrbracket = 3$, $\llbracket 5 \rrbracket = 5$ y $\llbracket -6,23.. \rrbracket = -7$.

Observación. *sen*$(n°)$ es irracional para enteros positivos, n, que no son divisibles por 30.

(A) 176 (B) 178 (C) 180 (D) 360 (E) 1012

Problema 15. Cuando un rayo luminoso se refleja en un espejo plano en un punto M, el ángulo de incidencia i y el ángulo de reflexión r son iguales (figura 1).

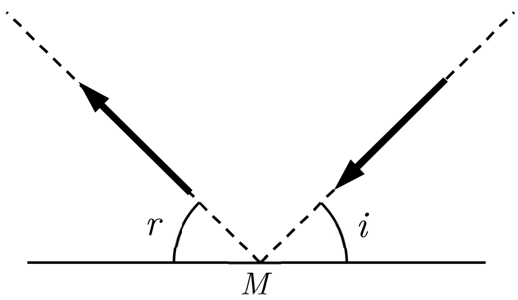


Figura 1

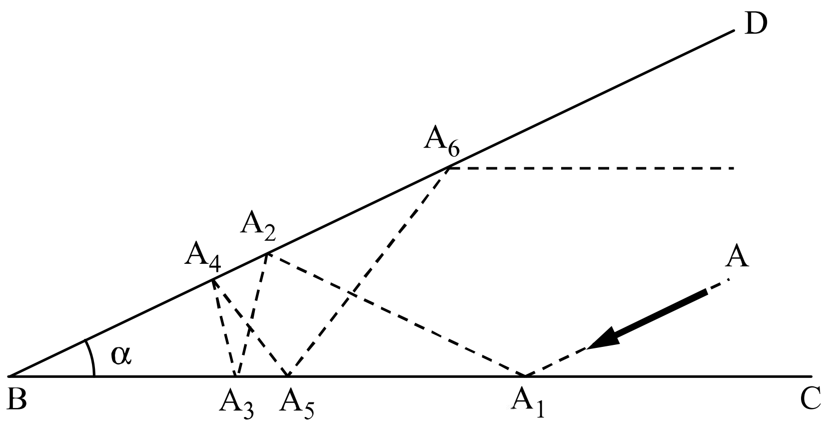


Figura 2

En la figura 2, los espejos BC y BD forman un ángulo agudo α. Desde un punto A se emite un rayo láser hacia el espejo BC, paralelo a BD, que se refleja primero en A_1 y luego en A_2 generando una secuencia de reflexiones sucesivas $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6$. En la figura el ángulo α es 26° y se observa que el rayo se refleja en los espejos un máximo de 6 veces. ¿Cuántos valores enteros (incluyendo $\alpha = 26°$) puede tomar α para que el mismo fenómeno, es decir, un máximo de 6 reflexiones, siga ocurriendo?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6